DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

MATHEMATIQUES

1ère épreuve commune aux 3 options M, P et TA

Durée : 4 heures

Dans cette épreuve, il sera tenu compte de la qualité des démonstrations. Les parties A et B sont largement indépendantes.

Notations et Rappels de définitions

. I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, $C^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I et $C^n(I)$ l'ensemble des fonctions n fois continuement dérivable sur I.

. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$

On appelle subdivision régulière pointée du segment $[a,b]$ en n parties tout couple $\sigma = (s,\xi)$ élément de $[a,b]^{n+1} \times [a,b]^n$ tel que si s est le n+1 uplet $(x_0, x_1, \dots x_n)$ et ξ le n uplet $(\xi_0, \xi_1, \dots \xi_{n-1})$ on a :

$$\forall i \in \{0, n-1\} \quad x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right) \text{ et } x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1} \text{ et } x_n = b$$

On appelle somme de Riemann associée à σ la quantité $\tilde{f}(\sigma)$

définie par : $\tilde{f}(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(\xi_i)$

On rappelle que si f est continue sur $[a,b]$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \tilde{f}(\sigma) = \int_a^b f(x)\,dx$$

. S ($\mathbb{R}$) est l'ensemble des suites réelles

Soient $(Un)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Vn)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Les suites $(Un)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Vn)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes si et seulement si il existe une suite (ω_n) telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad Un = Vn\,(1 + \omega_n) \\ \text{et } \lim_{n \to +\infty} \omega_n = 0 \end{cases}$$

PARTIE A

A toute fonction de f de $C^0([0,1])$, on associe les deux suites $(Un)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(Vn)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par : $n \in \mathbb{N}^*$

$$Un = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad Vn = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$$

1°/- Soit f une fonction de $C^0([0,1])$

Montrer que Un et Vn sont des sommes de Riemann associées à la fonction f sur $[0,1]$ et en déduire que les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(Vn)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite que l'on déterminera.

2°/- Soit h une fonction appartenant à $C^5([0,1])$

soit $u : [0,1] \to \mathbb{R} : x \to u(x)$ avec

$$u(x) = h(x) - h(0) - \frac{x}{2}\left(h'(x) + h'(0)\right) + \frac{1}{12} x^2 \left(h''(x) - h''(0)\right) - \frac{A}{6!} x^5$$

Montrer que l'on peut choisir A tel que $u(1) = 0$ et en déduire, en étudiant les dérivées successives de u qu'il existe alors au moins un réel c dans $]0,1[$ tel que $A = h^{(5)}(c)$

3°/- Soit f une fonction appartenant à $C^4([0,1])$

a) Déduire de ce qui précède que :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) - \frac{1}{12}\left(f'(1) - f'(0)\right) + \frac{1}{6!} R$$

avec $|R| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)|$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \forall k \in \{0, n-1\}$$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx = \frac{1}{2n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right) - \frac{1}{12\,n^2}\left(f'\left(\frac{k+1}{n}\right) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\right) + \frac{1}{6!}\,\frac{\Gamma_k}{n^5}$$

avec $|\Gamma_k| \leq \sup_{x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]} |f^4(x)|$

c) En déduire que :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = V_n - \frac{1}{12\,n^2}\left(f'(1) - f'(0)\right) + \frac{1}{6!}\,\frac{\Gamma}{n^4}$$

avec $|\Gamma| \leq \sup_{x \in (0,1)} |f^4(x)|$

d) Soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \omega_n = V_n - \frac{1}{12n^2}\left(f'(1) - f'(0)\right)$$

On pose $n \in \mathbb{N}^*$

$$U'_n = \int_0^1 f(x)\,dx - U_n \; ; \; V'_n = \int_0^1 f(x)\,dx - V_n \; ; \; \omega'_n = \int_0^1 f(x)dx - \omega_n$$

De ce qui précède, montrer que les suites $(\omega_n), (U'_n), (V'_n)$ et (ω'_n) convergent et donner un équivalent simple quand cela est possible des suites $(U'_n), (V'_n)$ et (ω'_n) (Eventuellement, il peut être intéressant de trouver une relation entre U'_n et V'_n)

4°) On pose n = 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{-x^2}$ et $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

On indiquera ici la marque de la calculatrice utilisée

a) Calculer U_n, V_n, ω_n

b) En déduire une valeur approchée I_1 de I et une majoration de $|I - I_1|$

c) En général que préférez-vous choisir des valeurs U_n, V_n et ω_n pour approximer $\int_0^1 f(x)\,dx$. Justifier rapidement votre choix

5°/- Soit f une fonction appartenant à $C^0(]0,1])$

On considère toujours $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

a) On suppose que f est une fonction monotone décroissante sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

Montrer que : 1°) $\left(k \in \{1, n-1\}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

2°) $\left(\int_0^1 f(x)\,dx \text{ convergente}\right) \Rightarrow \lim_{x \to 0} x\, f(x) = 0$

En déduire que : $\left((U_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ suite convergente}\right) \Leftrightarrow \left(\int_0^1 f(x)\,dx \text{ convergente}\right)$ et comparer alors $\lim_{n \to \infty} U_n$ et $\int_0^1 f(x)\,dx$

b) Peut-on généraliser le résultat du 5° a) à une fonction monotone?

c) Peut-on considérer U_n comme une somme de Riemann et utiliser les résultats du 1er pour résoudre 5° a) ?

PARTIE B

Soit f une fonction appartenant à $C([n_0, +\infty[)$, n_0 étant un entier naturel.

Pour $n \geq n_0$, on considère

$$\alpha_n = f(n) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{n_0}^{n} \alpha_n$$

$$\overline{\alpha_n} = \int_n^{n+1} f(t)dt - f(n) \qquad \overline{S_n} = \sum_{n_0}^{n} \overline{\alpha_n}$$

$$\widetilde{\alpha_n} = \int_n^{n+1} f(t)dt - \frac{1}{2}\left(f(n) + f(n+1)\right) \qquad \widetilde{S_n} = \sum_{n_0}^{n} \widetilde{\alpha_n}$$

On se propose d'étudier les séries de terme général α_n, $\bar{\alpha}_n$ et $\widetilde{\alpha}_n$ et en cas de convergence de donner un encadrement de la somme.

1°/- Soit f décroissante et minorée sur $[n_o, +\infty[$

a) montrer que : $\forall n \geqslant n_o$, $\alpha_n \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geqslant \alpha_{n+1}$

b) En déduire que la série de terme général α_n et $\int_{n_o}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

c) En déduire que $\bar{\alpha}_n$ et $\widetilde{\alpha}_n$ sont respectivement les termes généraux de séries convergentes et donner un encadrement des sommes de ces séries. (Remarque : il peut être intéressant de comparer $\bar{S}_n$ et $\widetilde{S}_n$).

Désormais dans la suite, on suppose que f est une fonction appartenant à $C^2([n_o, +\infty[)$

2°/- a) Montrer que $\forall n \geqslant n_o, \exists c_n \in]n,n+1[$ tel que $\bar{\alpha}_n = \frac{1}{2} f'(C_n)$

b) Montrer que $\forall n \geqslant n_o, \exists d_n \in]n,n+1[$ tel que $\widetilde{\alpha}_n = -\frac{1}{12} f''(d_n)$

(On pourra éventuellement s'inspirer du A/1°) et étudier les dérivées de $u(x) = h(x) - h(0) - \frac{x}{2}\left(h'(x) + h'(0)\right) + \frac{A}{12} x^3$

c) Calculer $\widetilde{S}_n - \bar{S}_n$ pour n appartenant à $[n_o, +\infty[$

3°/- a) Montrer que si la suite (α_n) est convergente, alors les séries de terme général $\bar{\alpha}_n$ et $\widetilde{\alpha}_n$ sont de même nature.

b) Montrer que si f' est monotone, la série de terme général $\bar{\alpha}_n$ est convergente si et seulement si f admet une limite en $+\infty$. Que dire dans ce cas de la série de terme général $\widetilde{\alpha}_n$.

c) Montrer que si f'' est monotone, la série de terme général $\widetilde{\alpha}_n$ est convergente si et seulement si f' admet une limite en $+\infty$.

4°/- Soient les fonctions f, g et h définies par $f(x) = \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}\, x)$, $g(x) = f'(x)$ et $h(x) = f''(x)$.

a) Comparer pour chacune de ces fonctions $\sum_{n_o}^{n} \alpha_p$, $\sum_{n_o}^{n} \bar{\alpha}_p$, $\sum_{n_o}^{n} \widetilde{\alpha}_p$ et $\int_{n_o}^{n} f(t)dt$ en choisissant n_o.

b) Etudier pour chacune de ces fonctions les séries de terme général α_n, $\bar{\alpha}_n$ et $\widetilde{\alpha}_n$ et en cas de convergence donner un encadrement de la somme de la série.